## Étude statique et dynamique d'un gratte-ciel

## A - Statique

On modélise en première approximation un gratte-ciel de forme parallélépipédique rectangle, dont une des directions est la verticale ascendante Oz, par un solide localement homogène de masse volumique  $\rho(z)$ . La base est située à l'altitude z=0 et le sommet à z=h. L'aire d'une section horizontale du parallélépipède est notée S. On suppose le gratte-ciel immobile dans un référentiel galiléen.

- 1. L'accélération de la pesanteur étant notée g, écrire le poids d'une tranche horizontale de gratte-ciel d'épaisseur dz située à l'altitude  $z_0$  et en déduire la force exercée sur la partie supérieure du gratte-ciel par la partie inférieure en fonction de l'altitude désignant la frontière entre les deux.
- 2. En déduire la force exercée par la partie supérieure sur la partie inférieure. Quelle loi du mouvement de Newton vous donne cette réponse? Est-elle dépendante d'un éventuel mouvement du gratte-ciel (séisme, effondrement...)?
- 3. Expliquer pour quelle raison liée aux matériaux de construction la fonction  $\rho(z)$  doit être décroissante. Citer un bâtiment très connu (non parallélépipédique) où cette décroissance apparaît dans la forme même du bâtiment.
- 4. Le gratte-ciel étant à structure acier, que pouvez-vous en déduire sur l'évolution de la géométrie des colonnes de son armature en fonction de z?

## B - Dynamique

On observe l'effondrement du gratte-ciel, avec une partie supérieure  $(z > z_0)$  chutant en bloc; une analyse vidéo permet de conclure, au moins pour le début de la chute, à un

mouvement uniformément accéléré d'accélération a.

- 1. Si l'effondrement se produit sous l'effet de la gravitation, quelle est la valeur maximale observable de a?
- 2. Appliquer la deuxième loi du mouvement de Newton à la partie supérieure et en déduire la force qu'exerce sur elle durant la chute la partie du bâtiment se trouvant sous elle.
- 3. Le facteur de sécurité dans la construction de bâtiments est généralement supérieur à 3, c'est-à-dire que les bâtiments sont théoriquement prévus pour supporter au moins 3 fois  $^1$  leur propre poids avant de s'effondrer. Par quel facteur a dû être réduite la résistance de la structure du bâtiment pour que la chute observée se produise? Applications numériques :  $a = -6, 3 \text{ m.s}^{-2}$  et  $a = -9, 8 \text{ m.s}^{-2}$ . Ces accélérations correspondent à celles mesurées sur une fraction du temps de chute pour, respectivement, la tour nord du World Trade Center (WTC1)  $^2$  et le Salomon Brothers Building (WTC7)  $^3$  le 11 septembre 2001.
- 4. Dans un article paru en janvier 2002 <sup>4</sup>, Bažant et Zhou étudient l'effondrement des tours jumelles de New York en faisant l'hypothèse que le bloc supérieur du gratte-ciel tombe sur la partie inférieure d'une hauteur égale à celle d'un étage (3,7 m) avec une accélération g égale à celle de la pesanteur (« the upper part may be assumed to move through distance h almost <sup>5</sup> in a free fall »). Décrivez simplement à quoi équivaut cette hypothèse pour la structure du bâtiment, et si elle vous semble réaliste.

<sup>1.</sup> Dans le cas de gratte-ciel, ce facteur est même supérieur, en particulier pour les éléments latéraux de structure. En effet, ceux-ci doivent supporter non seulement des charges statiques (poids) mais également des charges dynamiques créées par les séismes et les vents. À titre d'exemple, les colonnes des façades des anciennes tours jumelles du World Trade Center de New York pouvaient supporter 5 fois leur charge statique [G. Szuladziński and A. Szamboti and R. Johns, International Journal of Protective Structures 4, 117 (2013)].

<sup>2.</sup> Destruction of the World Trade Center North Tower and Fundamental Physics, David Chandler, Journal of 9/11 Studies, février 2010

<sup>3.</sup> Final Report on the Collapse of World Trade Center Building 7, National Institute of Standards and Technology, novembre 2008

<sup>4.</sup> Why Did the World Trade Center Collapse? - Simple Analysis, Journal of Engineering Mechanics, janvier 2002

<sup>5.</sup> Même s'ils utilisent l'adjectif « almost » (presque), Bažant et Zhou écrivent dans la suite une équation où l'hypothèse est exactement l'accélération de la pesanteur g.