Propagation des ondes - 3

L3 physique & sciences physiques - UPPA 2012-2013

Rayonnement d'un dipôle électrique variable

Pour comprendre la « naissance » des ondes électromagnétiques, il est utile d'étudier la propagation du potentiel créé par un dipôle électrique lorsque celui-ci varie au cours du temps. Beaucoup d'« objets » sont des dipôles au sens strict, comme certaines molécules (celle de l'eau par exemple) ; toutefois il ne faut pas comprendre le terme dipôle dans un sens trop étroit mais plutôt comme le premier terme du développement d'une distribution spatiale de charges électriques. En effet, on peut montrer que toute distribution « vue de loin » peut être représentée par un développement multipolaire. Le premier terme, qualifié de monopolaire, correspond au cas où la distribution n'est pas équilibrée : elle comporte plus de charges positives que négatives, ou inversement. Il consiste à assimiler la distribution à une charge ponctuelle dont la valeur est la somme algébrique de toutes les charges. Le deuxième terme, qualifié de dipolaire, est important lorsque le premier est nul (ce qui est souvent le cas car la matière est électriquement neutre) mais que le barycentre des charges positives est différent de celui des charges négatives. Lorsque les deux barycentres sont confondus, on peut ensuite ajouter un terme quadrupolaire, puis octupolaire, etc.

On prend pour modèle de dipôle un fil conducteur rectiligne vertical de longueur d dont le centre est situé sur l'origine de l'axe Oz. On utilise dans la suite les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) pour repérer un point P à partir de l'origine. On rappelle les formules du gradient et du rotationnel en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{grad}\, V &= \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{u}_\phi \\
\overrightarrow{rot}\, \vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\, A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_\phi
\end{aligned}$$

1. Le fil, initialement non chargé et à l'équilibre est parcouru à partir de $t = 0$ par un courant $I(t)$ variable au cours du temps. Expliquer qualitativement pourquoi le fil devient assimilable à un dipôle variable et exprimer le moment dipolaire $\vec{p}(t)$ correspondant.

   Un courant qui s'établit pendant un certain temps conduit nécessairement à un déplacement des charges libres, qui se retrouvent en excès à une extrémité et en défaut à l'autre. Lorsque le courant *change de sens, le mouvement inverse produit l'effet inverse ; le fil se comporte donc comme un dipôle avec des charges opposées et variables aux extrémités. Ce dipôle vaut par définition :*

$$\vec{p}(t) = a\, q(t)\, \vec{u}_z$$

2. On se place en un point $P\,(r, \theta, \phi)$ de l'espace tel que $r \gg d$. Exprimer le potentiel électrique $V\,(r, \theta, \phi, t)$ créé en ce point par le dipôle, en fonction de $p\left(t - \frac{r}{c}\right)$ et de sa dérivée p' (en considérant que p est une fonction d'une seule variable, $u = t - \frac{r}{c}$). Comment pouvez-vous expliquer qualitativement que le terme facteur de p soit en $\frac{1}{r^2}$ (comme pour le potentiel électrostatique d'un dipôle) alors que le terme facteur de p' soit en $\frac{1}{r}$?
   On rappelle que le potentiel créé par une charge ponctuelle variable $q(t)$ située à l'origine s'écrit :

$$V\,(r, \theta, \phi, t) = V\,(r, t) = \frac{q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Le potentiel est la somme des potentiels créés par les deux charges ponctuelles produites aux extrémités du fil par l'existence du courant. La charge en $z = +\frac{d}{2}$ (point A) et la charge située en $z = -\frac{d}{2}$ (point B) sont nécessairement opposées au même instant t en raison de la neutralité du fil. On peut donc garder une seule notation $q(t)$ qui désigne par exemple la charge en $z = +\frac{d}{2}$ et noter directement $-q(t)$ pour l'autre.
Ces deux charges ne se situent pas, en général, à la même distance du point P considéré : appelons r_+ la distance AP et r_-la distance BP. Le potentiel en P vaut alors :

$$\begin{aligned} V\,(r, t) &= \frac{q\left(t - \frac{r_+}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q\left(t - \frac{r_-}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r_-} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q\left(t - \frac{r_+}{c}\right)}{r_+} - \frac{q\left(t - \frac{r_-}{c}\right)}{r_-}\right] \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\right](r_+ - r_-) \end{aligned}$$

Les distances r_+ et r_- étant peu différentes de r (distance OP), on fait à la dernière ligne l'approximation consistant à linéariser la fonction $\frac{q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$.

N.B. : *Nous laisserons tomber provisoirement la notation $q\left(t - \frac{r}{c}\right)$ pour garder seulement q dans quelques lignes suivantes pour alléger la notation.*

Calculons la dérivée partielle :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q}{r}\right] = \frac{\frac{\partial q}{\partial r} r - q}{r^2}$$

Il faut effectuer un calcul intermédiaire : $\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial q}{\partial u} = -\frac{1}{c}q'$. On obtient donc :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q}{r}\right] = \frac{-\frac{r}{c}q' - q}{r^2}$$

Par ailleurs si θ est la deuxième coordonnée sphérique du point $P(r,\theta,\phi)$, alors $r_+ - r_- = -a\cos\theta$ ce qui donne finalement :

$$V(r,t) \approx \frac{-a\cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\frac{r}{c}q'\left(t-\frac{r}{c}\right)-q\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^2} \quad (1)$$

$$\approx \frac{-\cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\frac{r}{c}p'\left(t-\frac{r}{c}\right)-p\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^2} \quad (2)$$

Le terme facteur de p' est en $\frac{1}{r}$ comme le potentiel d'une charge ponctuelle : ceci laisse penser que le point P « voit » une charge globale non nulle au lieu d'un fil électriquement neutre. C'est le cas ! Comme le potentiel se propage à la vitesse finie c, et que les distances r_+ et r_- sont en général différentes, si le moment dipolaire (donc la charge q) est variable dans le temps, alors le point P « voit » les charges aux extrémités du fil à deux instants différents $t-\frac{r_+}{c}$ et $t-\frac{r_-}{c}$, ce qui fait une somme non nulle. Cet effet n'existe pas pour un dipôle statique, c'est pourquoi c'est uniquement le terme en p' qui se comporte comme le potentiel d'une charge.

3. Exprimer le potentiel vecteur $\vec{A}$ au point P. On rappelle que pour un élément de circuit de longueur $d\vec{l}$ parcouru par un courant variable $I(t)$ et situé à l'origine, il vaut en P :

$$\vec{A}(r,\theta,\phi,t) = \vec{A}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left(t-\frac{r}{c}\right)\,d\vec{l}}{r}$$

Le calcul est ici plus simple, puisqu'on s'intéresse à l'effet d'un courant le long du fil et non à un effet différentiel entre les deux extrémités du fil porteuses de charges variables. La variation temporelle est déjà incluse dans l'existence même du courant ! D'ailleurs, si on devait tenir compte d'un effet différentiel, il faudrait tenir compte de la variation du courant perçu en P en fonction de la position de l'élément de fil considéré, ce qui conduirait à un calcul intégral et non à une simple différence entre deux points comme dans la question précédente.
On écrit ici directement :

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left(t-\frac{r}{c}\right)\,a\,\vec{u}_z}{r}$$

On peut également exprimer ce potentiel vecteur en fonction de p' : sachant que $I=\frac{dq}{dt}$, $Ia = \frac{d(qa)}{dt} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{du}\frac{du}{dt} = p'.1 = p'$. Donc on a également :

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p'\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{u}_z}{r}$$

4. Calculer les composantes du champ électrique à partir de la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, en fonction de p et de ses dérivées.

Le potentiel scalaire V ne dépend que des coordonnées spatiale r et θ (pas de ϕ) et du temps t. La formule du gradient se simplifie donc, mais attention : le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ utilisé pour $\vec{A}$ n'est pas un vecteur de la base sphérique, il faut donc le projeter sur cette base :

$$\vec{u}_z = \cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta$$

Le gradient du potentiel scalaire donne (en laissant tomber les $t-\frac{r}{c}$ pour alléger les notations, et en se rappelant que $\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial u}$) :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{grad}\,V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix}\frac{\partial V}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix}-\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{-\frac{r}{c}p'-p}{r^2}\right]\\ \frac{1}{r}\frac{-\frac{r}{c}p'-p}{r^2}\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix}-\cos\theta\frac{\left(\frac{r}{c^2}p"+\frac{1}{c}p'-\frac{1}{c}p'\right)r^2-\left(-\frac{r}{c}p'-p\right)2r}{r^4}\\ \frac{1}{r}\frac{-\frac{r}{c}p'-p}{r^2}\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ s'obtient immédiatement puisque $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial u}$:

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p"}{r}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

D'où finalement le champ électrique (en remplaçant μ_0 par $\frac{1}{\epsilon_0c^2}$ à la deuxième ligne) :

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix}\cos\theta\frac{\frac{r^2}{c^2}p"+\frac{2r}{c}p'+2p}{r^3}\\ \frac{-\frac{r}{c}p'-p}{r^3}\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p"}{r}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0r^3}\begin{pmatrix}2\cos\theta\left(\frac{r}{c}p'+p\right)\\ \left(\frac{r^2}{c^2}p"+\frac{r}{c}p'+p\right)\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}}$$

5. Calculer les composantes du champ magnétique donné par $\vec{B}=\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont-ils orthoradiaux ?

   Le champ magnétique est plus facile à calculer (pour une fois !) ; en effet on peut le calculer par la formule $\vec{B}=\vec{rot}\,\vec{A}$ en exprimant directement $\vec{A}$ selon $\vec{u}_z$, grâce à la formule d'analyse vectorielle :

$$\vec{rot}\left(\alpha\vec{V}\right)=\alpha\,\vec{rot}\vec{V}+\vec{grad}\alpha\wedge\vec{V}$$

Ce qui nous donne ici :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{rot}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p'\vec{u}_z}{r}\right)\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{rot}\left(\frac{p'}{r}\vec{u}_z\right)\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{p'}{r}\vec{rot}\vec{u}_z + \vec{grad}\left(\frac{p'}{r}\right)\wedge\vec{u}_z\right]\end{aligned}$$

Or $\vec{rot}\vec{u}_z = \vec{0}$, il reste donc :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p'}{r}\right)\vec{u}_r\wedge\vec{u}_z\right]\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{-\frac{1}{c}p"r - p'}{r^2}\vec{u}_r\wedge\vec{u}_z\right]\end{aligned}$$

Comme $\vec{u}_r\wedge\vec{u}_z = \vec{u}_r\wedge(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta) = -\sin\theta\,\vec{u}_r\wedge\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{u}_\phi$, on a finalement :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\sin\theta}{4\pi r^2}\left(\frac{r}{c}p" + p'\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$$

On remarque que le champ $\vec{E}$ a une composante radiale non nulle ; il n'est donc pas orthoradial. Par contre le champ magnétique l'est.

6. Lorsqu'on se trouve loin de l'origine, quelles sont les composantes de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ qu'on peut négliger ? Donner les expressions simplifiées de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ et montrer que $\vec{B}$ peut s'exprimer directement sous forme vectorielle en fonction de $\vec{E}$, $\vec{u}_r$ et c. Comment est polarisée l'onde électromagnétique ? Comment varient les normes des champs en fonction de la distance au dipôle ? Comparer au cas statique.

   Loin de l'origine, on néglige les termes de puissance les plus basses en r. Il reste donc pour le champ électrique :

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix}0\\ \frac{r^2}{c^2}p"\sin\theta\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 rc^2}p"\sin\theta\,\vec{u}_\theta$$

   qui est cette fois orthoradial ; pour le champ magnétique il reste :

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0\sin\theta}{4\pi rc}p"\sin\theta\,\vec{u}_\phi$$

   En utilisant la propriété $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$, on peut transformer l'écriture de $\vec{B}$ et les deux champs apparaissent alors reliés très simplement :

$$\begin{aligned}\vec{E} &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{p\text{''}\sin\theta}{r}\,\vec{u}_\theta\\ \vec{B} &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{p\text{''}\sin\theta}{r}\,\vec{u}_\phi\end{aligned}$$

Sachant que $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_\phi$, on peut écrire la relation :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

en remarquant que $\vec{u}_r$ constitue ici le vecteur unitaire de la direction de propagation du champ électromagnétique. On retrouve la structure de l'onde plane.

L'onde électromagnétique est polarisée suivant $\vec{u}_\theta$ puisque la polarisation est définie par la direction du champ électrique. Les normes des champs varient en $\frac{1}{r}$ contrairement au cas statique où elles varient en $\frac{1}{r^2}$. Cette variation est rendue nécessaire par la conservation de l'énergie : puisque celle-ci est transportée l'onde, et qu'elle est proportionnelle au carré des champs ($\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$), il est nécessaire que les champs varient en $\frac{1}{r}$ pour qu'en intégrant sur la surface de la sphère de rayon r (donc sur une surface variant comme r^2), l'énergie reste constante.

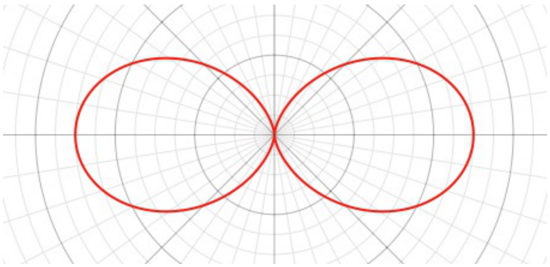
7. Dans le cadre de cette dernière approximation, calculer le vecteur de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ et rappeler sa signification ainsi que son unité. Quelle est sa direction ? De quelle coordonnée autre que r sa norme dépend-elle ? Tracer la variation de $\left\|\vec{R}\right\|$ en fonction de cette variable et en examiner les conséquences pour l'émission et la réception d'ondes radio.

   Le calcul donne directement :

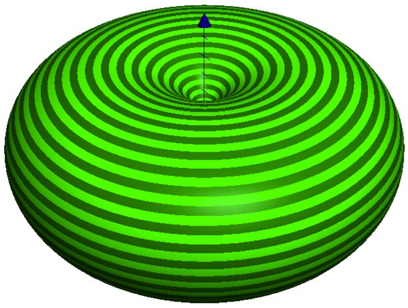
$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2\mu_0 c^5}\left(\frac{p\text{''}\sin\theta}{r}\right)^2 \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\phi\\ &= \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\left(\frac{p\text{''}\sin\theta}{r}\right)^2 \vec{u}_r\end{aligned}$$

   Sa direction est radiale, c'est la direction de propagation. Sa norme ne dépend que de r et de θ (pas de ϕ) ; le rayonnement est donc à symétrie cylindrique autour de l'axe Oz. La norme de $\vec{R}$ est nulle selon l'axe Oz ($\sin\theta = 0$), et maximale dans le plan orthogonal au dipôle. Ce qui signifie qu'une antenne émettrice verticale émet son maximum de puissance dans le plan horizontal qui passe par elle ; et symétriquement, puisque le champ électrique émis dans les directions de ce plan a une polarisation verticale, une antenne réceptrice sera plus efficace si elle est verticale, la différence de potentiel à ses extrémités étant provoquée par l'entraînement des charges libres par le champ électrique.

   L'aspect de la variation de $\left\|\vec{R}\right\|$ en fonction de θ, en coordonnées polaires, est le suivant (le dipôle est vertical sur la figure) :



On peut tracer ce diagramme dans l'espace pour faire joli, mais ça ne sert pas à grand-chose puisque la puissance ne dépend pas de ϕ :



8. En intégrant sur la surface d'une sphère centrée à l'origine, calculer la puissance moyenne rayonnée par un dipôle oscillant à la pulsation ω, défini par $p(t) = p_0 \cos(\omega t)$.

   Le problème étant à symétrie cylindrique, l'élément de sphère pour l'intégration est une couronne sphérique de largeur $d\theta$ située à la cote θ ; son aire vaut $dS = 2\pi\,(r\sin\theta)\,(rd\theta) = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta$. Le vecteur de Poynting est en tout point orthogonal à la sphère ; le produit scalaire $\vec{R}\cdot d\vec{S}$ vaut donc simplement $R\,dS$ et l'intégrale se calcule facilement :

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi r^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{\left\langle p"^2\right\rangle}{r^2}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^3}\frac{\omega^4 {p_0}^2}{2}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \end{aligned}$$

   Le calcul de l'intégrale peut se faire moyennant une petite transformation :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta &= \int_0^\pi \sin\theta\, \sin^2\theta\, d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin\theta\, \left(1-\cos^2\theta\right)\, d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta - \int_0^\pi \sin\theta\, \cos^2\theta\, d\theta \\ &= \left[-\cos\theta\right]_0^\pi + \left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{3}(-1-1) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$P = \frac{\omega^4 {p_0}^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \tag{3}$$

9. Examiner comment cette puissance varie en fonction de la pulsation (ou de la longueur d'onde). Sachant que toute molécule est composée d'un noyau et d'un nuage d'électrons, pouvez-vous en déduire qualitativement l'effet produit sur un faisceau de lumière blanche par la traversée d'un gaz non absorbant (par exemple l'air) ? Pouvez-vous appliquer ce raisonnement à un nuage de particules (solides ou liquides) au lieu des molécules, et si oui dans quelles limites ?

   Si la puissance varie comme ω^4, elle varie également comme λ^{-4} puisque $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}$. Donc, ***si le moment dipolaire p_0 ne dépend pas de la longueur d'onde****, la puissance rayonnée augmente très fortement lorsque la longueur d'onde diminue. Si une lumière blanche traverse un gaz comme l'air de l'atmosphère, chaque molécule de ce gaz va se transformer en dipôle variable sous l'action du champ électrique de l'onde. La polarisabilité de la molécule varie en général avec la fréquence (ou avec la longueur d'onde), il n'est donc pas tout à fait justifié de considérer que le moment dipolaire p_0 est indépendant de la longueur d'onde. Cependant, si cette variation n'est pas trop forte, l'effet donné par la relation 3 domine, et la lumière qui est diffusée par les molécules dans différentes directions de l'espace contient davantage d'énergie dans les courtes longueurs d'onde (violet, bleu) que dans les grandes (rouge, jaune). On peut de cette façon expliquer la dominante bleue du ciel de jour : en effet lorsqu'on regarde le ciel, on perçoit la lumière du soleil qui a été diffusée par l'atmosphère. Comme de plus l'oeil a une sensibilité très faible aux plus courtes longueurs d'onde du visible (violet), on verra une dominante bleue et non violette.*

   Bien entendu, cette explication est simplifiée et la vraie couleur du ciel doit tenir compte d'autres subtilités comme la présence d'eau liquide (brume), de polluants, etc.

   Pour des particules de plus grande taille que les molécules de gaz, le même raisonnement peut être tenu ; une particule isolante peut en effet se comporter en dipôle variable lorsqu'elle est soumise au champ électrique. Mais il faut prendre garde à sa taille : en effet, si elle est comparable à ou plus grande que la longueur d'onde de la lumière, le champ électrique n'est plus homogène dans le volume de la particule ; il en résulte qu'on ne peut plus la considérer comme un dipôle variable mais comme une superposition de dipôles variables déphasés entre eux. Le problème est alors beaucoup plus complexe et la dépendance du rayonnement en fonction des directions de l'espace l'est également.